

問題

A-Ⅲ. 2つ目の実験として、音叉を固定壁の近くに置き、壁からの反射音を利用してみよう。図3のように、壁面に垂直にとった y 軸に沿って音叉を移動させる。また、壁から遠く離れた y 軸上の位置にマイクロフォンを固定する。マイクロフォンは、音叉から直接達する音と壁からの反射音を観測する。この実験では、音叉は十分小さく、点音源と見なせる。

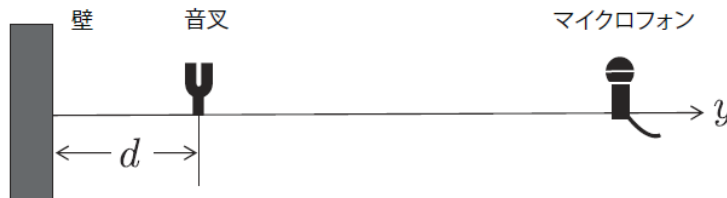
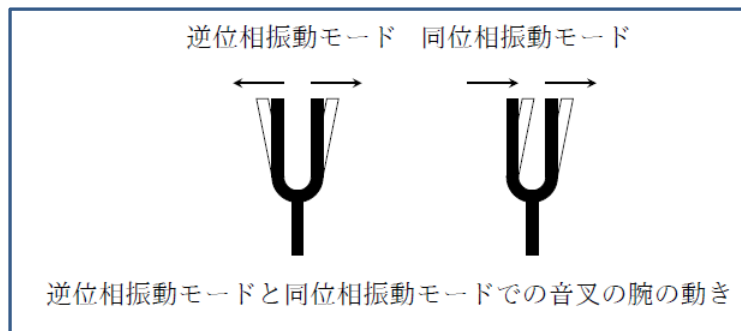


図3

問4 y 軸の正の方向に音叉の位置を少しずつ変えながらマイクロフォンで観測すると、音の強さが周期的に変動した。マイクロフォンで観測された音が強くなるときの、音叉と壁との距離 d と音の波長 λ との関係を表せ。必要であれば、自然数として n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を用いてよい。

この問題の解答について、平成30年1月12日に大阪大学から正式な解答が発表された。文と数式、さらに音叉の2つの振動モード（逆位相モード、同位相モード）での解説があるが、ここでは逆位相モードの場合についてのみ考察する。というのは、この前問で、音叉の振動は逆位相モードであると述べられているからである。同位相モードが実際にあるということであるが、出題の流れから同位相モードを前提にした解答は認められるべきなのかは疑問であるが、私の判断外である。



【大阪大学発表のもの】

(1) 文章での解説

変位の正の向きを y 軸正の向きとして考えると、音叉からマイクホン側と壁側の両方に向かって、変位で考えて逆位相の音波がそれぞれ進行していることになり、音叉で π の位相のずれがある。変位は壁で 0 でなければならないため固定端反射となり π だけ位相がずれる。これにより変位の位相のずれの合計は 2π であり、音波の経路差が $2d$ であるため、干渉して音が強めあうためには、 $2d$ が波長の整数倍 $2d = n\lambda$ でなければならない。

(2) 数式による解説

音叉から出た右進行波の式

$$f_1(y, t) = \cos(ky - \omega t)$$

同じく左進行波の式

$$f_2(y, t) = -\cos(-ky - \omega t)$$

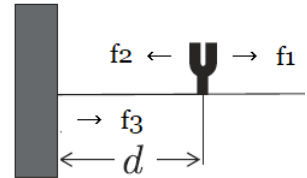
壁で反射した右進行波の式

$$f_3(y, t) = \cos(ky - \omega t + 2kd)$$

f_1 と f_3 が強め合う条件

$$2kd = 2\pi n \quad (n \text{ は自然数})$$

ここで $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ だから $2d = n\lambda$ が答えとなる



【補足】

(1) 高校物理では波の式は $f(y, t) = A \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda})$ と教えている。

これは原点 (波源) の振動を $f(0, t) = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$ とすると、位置 y では原点より $\frac{y}{v}$ だけ前の振動が到着するから、 $f(y, t) = A \cos 2\pi \frac{t - \frac{y}{v}}{T} = A \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda})$ となる。これが波の式である。

なので、進行方向によって y の前の符号が変わる。なお、 \sin と \cos が違っても、 t と y が反対になっても波としては同じことである。(初期位相の違いである)

(2) 時間的な 1 往復の長さを周期 T 、1 秒当たりの振動回数を振動数 f という。振動数を角度に直したものの (1 往復 = 1 回転と考える) が角振動数 ω で、 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ である。

同様に空間的な 1 往復の長さを波長 λ 、1m あたりの波の数を波数 k' という。同様に波数を角度に直したものが角波数 k で、 $k = 2\pi k' = \frac{2\pi}{\lambda}$ である。

(3) f_2 とから f_3 の導出について、阪大は f_3 が右進行波で、 f_2 から f_3 を生じる時の位相が φ 変化するとして、 $f_3(y, t) = \cos(ky - \omega t + \varphi)$ と式を置いている。ここで、壁の位置で入射波と反射波が打ち消すことから $f_2(-d, t) + f_3(-d, t) = 0$ とし、 $\varphi = 2kd$ と求めている。

ところで、壁では固定端反射をして位相が π 変化する (逆位相になる) ことが分かっているから、わかりやすく以下のように反射波を求めることができる。

壁での $f_2(y, t)$ の振動の式

$$f_2(-d, t) = -\cos(kd - \omega t)$$

反射波は位相が反転するから壁での反射波の振動の式は (反射波の波源となる)

$$f_3(-d, t) = \cos(kd - \omega t)$$

位置 $y > 0$ では壁より $y + d$ だけ振動が遅れて到着するから

$$f_3(y, t) = \cos(kd - \omega(t - \frac{y+d}{v}))$$

ここで $v = f\lambda = \frac{\omega}{k}$ であるから

$$f_3(y, t) = \cos(ky - \omega t + 2kd)$$

となり、阪大と同じ結果となる。

【Excel のグラフ機能による検証】

式を簡単にするため、 $k = 2\pi$ 、 $\omega = 2\pi$ （波長 1m、振動数 1Hz ということ）、 $n=1$ とすると

音叉から出た右進行波の式 $f_1(y, t) = \cos 2\pi(y - t)$

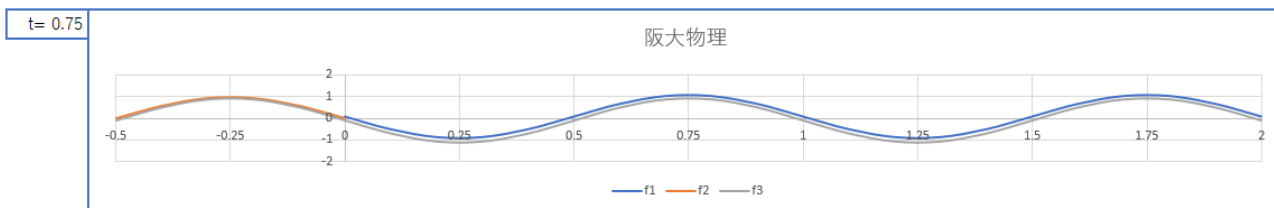
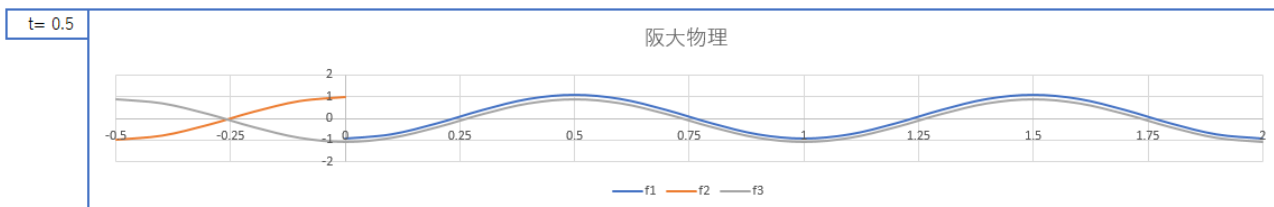
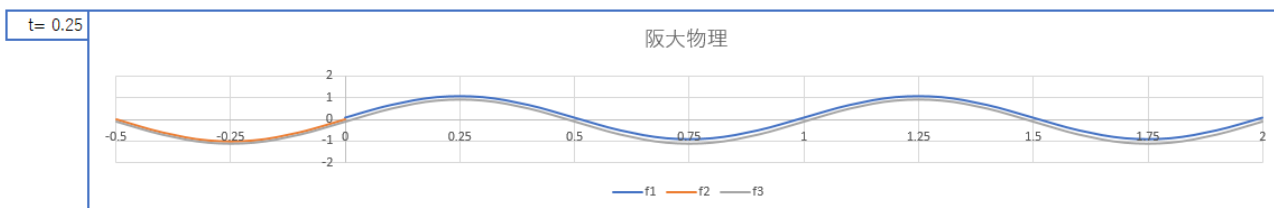
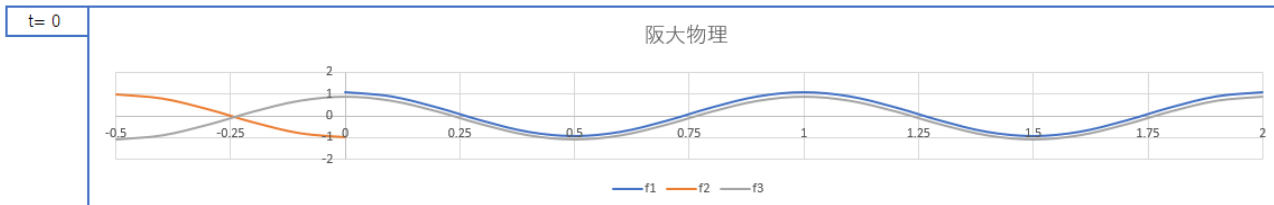
同じく左進行波の式 $f_2(y, t) = -\cos 2\pi(-y - t)$

また、 $n=1$ として、 f_1 と f_3 が強め合う場合の式は

$$f_3(y, t) = \cos 2\pi(y - t + 1)$$

以上 3 本のグラフを描画してみる。 $n=1$ では反射壁は音叉の左 0.5m の位置にあることになる。

※ 3 本のグラフが重なるので、 f_2 に対し f_1 と f_3 を少しずつ上下にずらした。



上図は、阪大の式のとおりシュミレーションしたものである。音叉の右側で強め合うということを条件にして作った式であるから、当然の結果である。音叉の左側については次の 2 つについて確認が必要である。

- (1) 音叉の右側と左側では逆相の音波が発生していること・・・正しい
- (2) 壁において固定端反射をしていること・・・・・・・・・・・・・正しい

【ミス解答に関する考察】

シュミレーションの結果からも、阪大の 1 月 12 日付の解説は正しいことが確認できた。では、なぜそれまで、阪大、S 台、T 進以外の予備校が解答を間違ってしまったのだろうか。

村上も当初は間違っていた。それぞれ間違った経緯は異なると思うが、村上の間違いに至った理由は以下のとおりである。

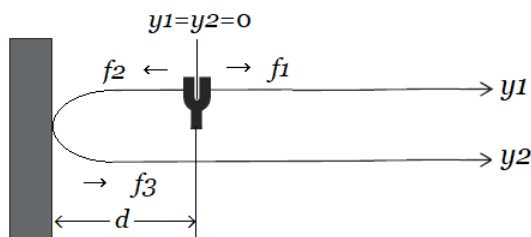
(1) 文章での解説

音叉から右、左向きに音波が発生する。それぞれの進行方向を変位の正の向きとして考えると、音叉からマイクフォン側と壁側の両方に向かって、同位相の音波が進行していることになる。

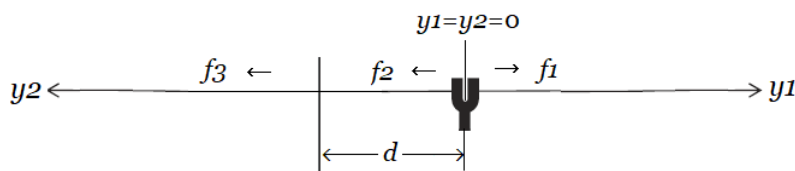
壁に向かった音波は壁のところで固定端反射となり π だけ位相がずれるので、2つの音波の位相のずれは π であり、音波の経路差が $2d$ であるため、干渉して音が強めあうためには、 $2d = (n - \frac{1}{2})\lambda$ なければならない。

(2) 数式による解説

音叉（波源）から右進行波の座標軸を y_1 、左進行波の座標軸を y_2 とする。両軸とも音叉の位置を原点、進行方向を正とする。そのため y_2 は図のように壁のところで曲がっている。



曲がった y_2 軸に違和感がある場合は、そのまま左にまっすぐ伸ばせばよい。



y_1 座標軸上での右進行波の式を

$$f_1(y_1, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y_1}{\lambda} \right) \text{ とすると}$$

y_2 座標軸上での左進行波の式は、壁の前までは

$$f_2(y_2, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y_2}{\lambda} \right) \text{ となる}$$

この波は壁の後ろでは位相が反転するから

$$f_3(y_2, t) = -A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y_2}{\lambda} \right) \text{ となる}$$

今後のために、阪大と同じく ω と k を使った式に書き直す。また $A=1$ とすると

$$f_1(y_1, t) = \sin(\omega t - k y_1) \text{ 、 } f_3(y_2, t) = -\sin(\omega t - k y_2) \text{ となる。}$$

音叉の右側位置 y における波の式は

右へ進んだ波については $y_1 = y$ だから

$$f_1(y, t) = \sin(\omega t - k y)$$

左に進んだ波については $y_2 = y + 2d$ だから

$$f_3(y, t) = -\sin(\omega t - k(y + 2d))$$

この2つの波を重ね合わせると

$$\begin{aligned} f_1(y, t) + f_3(y, t) &= \sin(\omega t - k y) - \sin(\omega t - k(y + 2d)) \\ &= \sin(\omega t - k y) - \sin(\omega t - k y - 2kd) \\ &= \sin(\omega t - k y) + \sin(\omega t - k y - 2kd + \pi) \end{aligned}$$

となるので、 y の位置にかかわらず強め合う条件は $-2kd + \pi = 2n\pi$ (n は整数) となる。

ここで $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ だから $2d = -(n - \frac{1}{2})\lambda$ となるが、 n は整数なら何でも良いので、改めて置き換えた別の自然 n を用いて $2d = (n - \frac{1}{2})\lambda$ が答えである。

【Excel のグラフ機能による検証】

式を簡単にするため、阪大と同様に $k = 2\pi$ 、 $\omega = 2\pi$ $n=1$ とする。音叉から右向位置を y として
音叉から出た右進行波の式

$$f_1(y, t) = \sin 2\pi(t - y)$$

また、 $n=1$ として、 f_1 と f_3 が強め合う場合の条件より $-2kd + \pi = 2n\pi$ を用いて

$$f_3(y, t) = \sin 2\pi(t - y + 1) \text{ である。}$$

音叉の左側の波の式については注意が必要である。 y は負の値も取り得るので

壁で反射する前は、

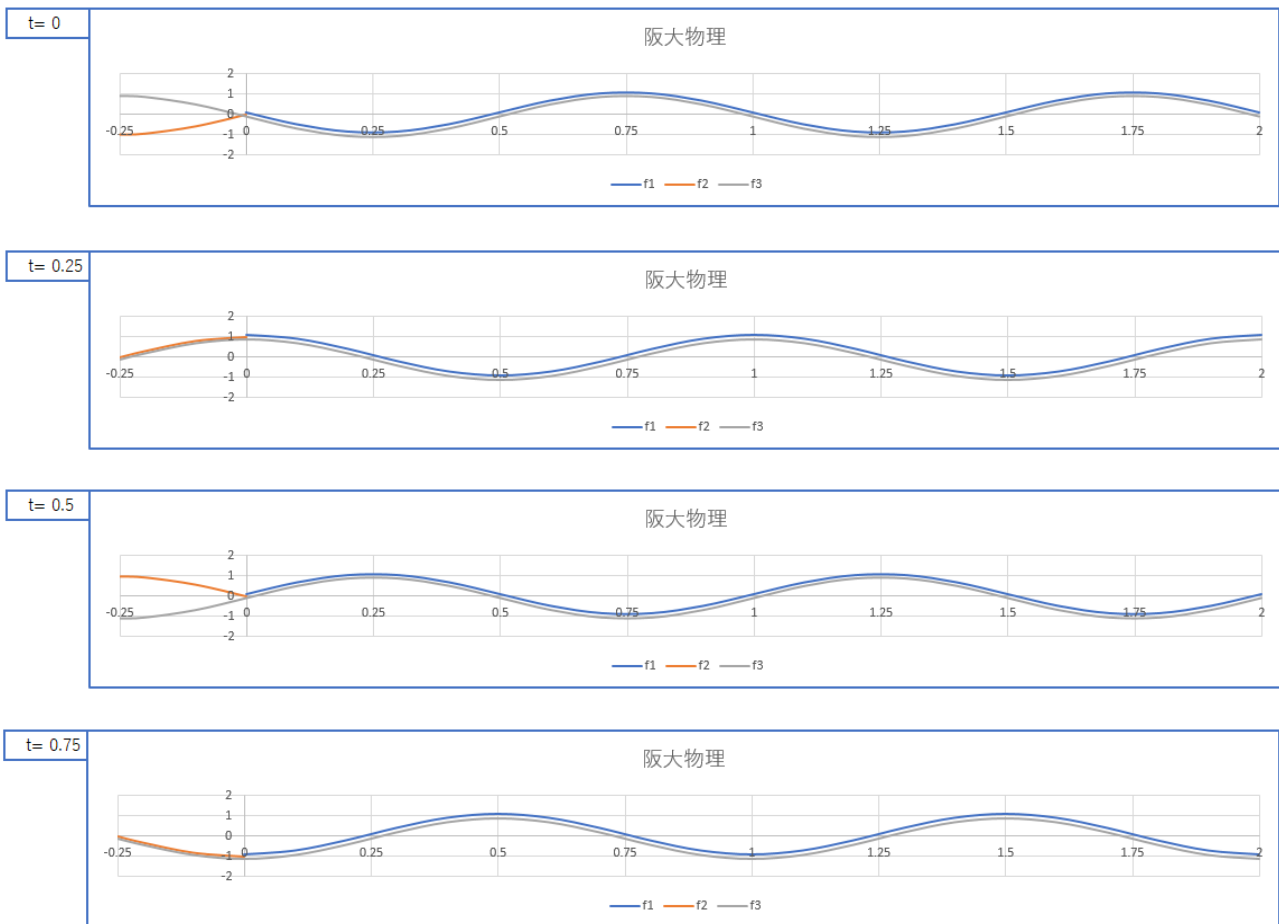
$$f_2(y, t) = \sin 2\pi(t - |y|) = \sin 2\pi(t + y)$$

壁で反射した後は、

$$f_3(y, t) = \sin 2\pi(t - y + 1) \text{ が使える}$$

以上 3 本のグラフを描画してみる。 $n=1$ では反射壁は音叉の左 0.25m の位置にあることになる。

※ 3 本のグラフが重なるので、 f_2 に対し f_1 と f_3 を少しずつ上下にずらした。



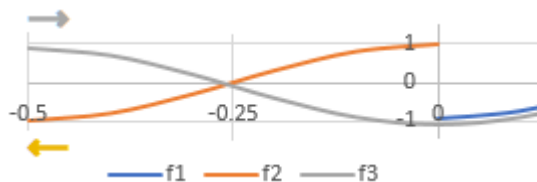
上図は、村上の式のとおりシュミレーションしたものである。これも音叉の右側で強め合うことを条件にして作った式であるから当然である。音叉の左側については阪大と同様に 2 点の確認が必要である。

- (1) 音叉の右側と左側では同相の音波が発生していること（音叉の両側で、それぞれの音波の進行方向を正にしているため、共に広がるような場合が同相である）・・・正しい
- (2) 壁において固定端反射をしていること・・・実はこれが間違い

なぜ前記(2)が間違いなのかを解説する。

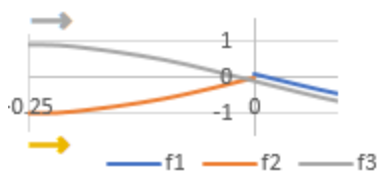
壁で音波が反射するときは固定端反射であることは間違いない。このとき反射波は入射波に対し位相が π 変化する（反転する、 $\frac{1}{2}\lambda$ 変化と言っても良い）。音波は縦波であるから、壁で音波が反射する前後で空気分子の変位にを横波表現したグラフ上に書き込んでみる。

阪大の図 (t=0.5)



阪大の図では、右向きが正である。したがって衝突直前の音波 f_2 は左方向に変位して、衝突直後の音波 f_3 は右方向に変位している。この2波を重ね合わせると壁の上では音波は消える、つまり固定端反射を正しく表している。

村上の図 (t=0)



村上は進行方向を正とした。したがって衝突直前の音波 f_2 は左方向が正である。t=0 のとき、グラフは負であるから、右方向に変位していることになる。

次に衝突直後の音波 f_3 は右方向が正である。t=0 のとき、グラフは正であるから、右方向に変位していることになる。ということは、この2波を重ね合わせると、壁の上では波は強め合っていることになり、固定端反射ではなくなる。

一見位相が π ずれる固定端反射のように見えるが、実は自由単反射である、という大きなミスをしてしまっていたのである。

進行方向を正にした場合の、文章による正しい説明は以下のようになる。

音叉から右、左向きに音波が発生する。それぞれの進行方向を変位の正の向きとして考えると、音叉からマイク側と壁側の両方に向かって、同位相の音波が進行していることになる。

壁に向かった音波は壁のところで固定端反射となるが、反射により波の進行方向が逆になるため、変位の正の向きも逆になることから、壁では位相変化なく反射することになる。

したがって2つの音波の合成には、経路差 $2d$ だけを考えればよく、重ね合わせて音が強めあう条件は $2d = n\lambda$ でなければならない。

以上、数式で改めて解説するのは省略する。